



PODSUMOWANIE PROJEKTU

*“Od pięciokąta foremnego do
fraktala dwunastościennego”*

Spis treści:

1. Kilka słów w ramach wstępu.
2. Tajemnicza natura fraktali.
3. Jak powstały pierwsze fraktale geometryczne.
4. Relacja z warsztatów.
5. Liczby też mogą być fraktalami.
6. Złota liczba i złoty podział oraz jego występowanie.
7. Podziękowania

Kilka słów w ramach wstępu ...

Na początku roku szkolnego, lotem błyskawicy, rozeszła się po szkole informacja o naborze uczniów do realizacji kolejnej części międzynarodowego projektu Sokrates-Comenius. Jak większości z Was wiadomo, szkoła uczestniczy w tym projekcie już trzeci rok, a opiekunem jest pani mgr Elżbieta Syrek. To właśnie ona, w maju 2005, zaproponowała mi udział w matematycznej części tego projektu i umożliwiła kontakt z nauczycielami matematyki ze szkół z Niemiec, Francji i Luksemburga.

Nasza współpraca miała dotyczyć pojęcia fraktali, ich własności i zastosowa-

nia. Uwieńczeniem całego przedsięwzięcia był listopadowy weekend geometrii w Lüdinghausen (Niemcy). Podczas tych warsztatów mieliśmy okazję uczestniczenia w wykładzie, który poprowadził dr Christoph Pöppe, na temat wielokątów i brył foremnych oraz ich związku z fraktalami geometrycznymi. Uczniowie i nauczyciele mogli również sprawdzić własne pokłady cierpliwości, staranności i dokładności podczas budowy drugiego kroku fraktala, opartego na dwunastościanie foremnym. Myślę, że nagrodą i wspa-
niałym przeżyciem dla nas wszystkich, był widok ogromnego, a zarazem pięknego obiektu matematycznego, który udało nam się „wyczarować” podczas dwóch dni



ciężkiej pracy.

Jednak zanim wyjechaliśmy do Niemiec, kilkunastoosobowa grupa uczniów spotykała się w każdy czwartek na kółku poświęconym projektowi. Zajęcia prowadzili nauczyciele i uczniowie. Nasze cotygodniowe spotkania pełne były niespodzianek, jak również przyjemności z odkrywania nieznanych dotąd zagadnień matematyki i radości tworzenia. Myślę, że nauczyliśmy się od siebie nawzajem. Efekty pracy możecie zobaczyć na zdjęciach umieszczonych w antyramach na pierwszym piętrze obok sali 210 i podczas wystawy prac w auli, natomiast artykuły napisane przez uczniów pomogą Wam zrozumieć, czym są fraktale, co się z nimi wiąże i gdzie można je spotkać.

W tym miejscu chciałabym jeszcze serdecznie podziękować za współpracę panom mgr Elżbiecie Syrek i mgr Agacie Żochowskiej oraz panu mgr. Apolinaremu Zielińskiemu za owocną współpracę, zaangażowanie i pomoc w realizacji tego projektu. A Wam, drodzy czytelnicy, życzę miłej lektury i przyjemnego zgłębiania tajemników, ukrytych w barwnym świecie matematyki.

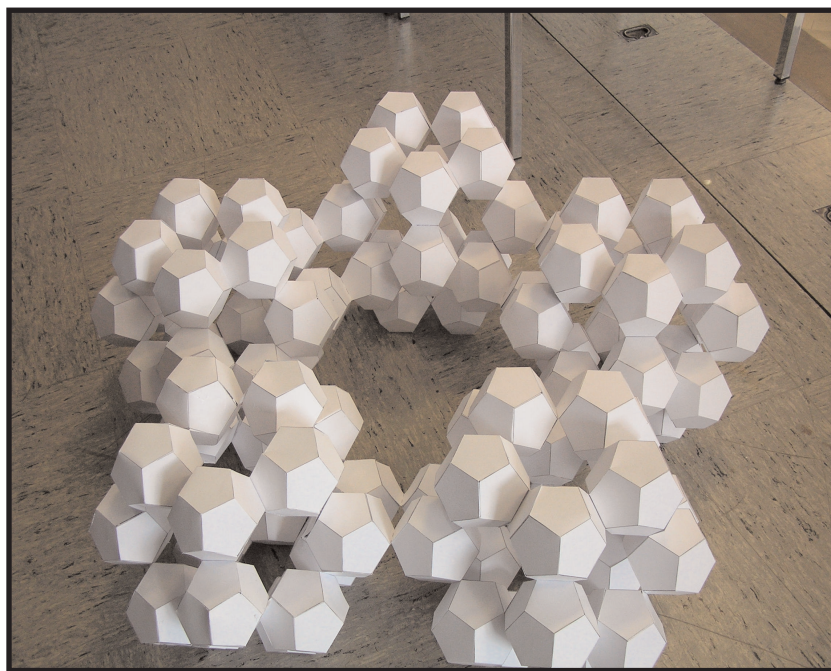
DANUTA BORKO

TAJEMNICZA NATURA FRAKTALI.

CZYM SĄ FRAKTALE?

Obserwując przyrodę, często upraszczamy ją, sprowadzając jej formy do prostych brył geometrycznych. I tak: horyzont to linia prosta, drzewa to walce itp. W ten sposób na przyrodę patrzył już Euklides. Czy jednak taka jest jej prawdziwa struktura?

W 1980 roku Benoit Mandelbrot badał pewne wielomiany zespolone i otrzy-



mał interesujące wykresy. Patrząc na nie, wysnuł przypuszczenie, że geometria euklidesowa nie nadaje się do opisu przyrody - góry nie są stożkami, a linia brzegowa nie jest odcinkiem. Są to raczej, jak to określał Euklides, "bezkształtne" formy, które Mandelbrot nazwał fraktalami - od

łacińskiego słowa *fractus* co znaczy “podzielony”, “ułamkowy”. Nazwa ta jest adekwatna - dobrze oddaje strukturę fraktali. Charakteryzuje je bowiem wysokie samopodobieństwo - każdy fragment przypomina całość.

Nie jest łatwo jednoznacznie zdefiniować, czym są fraktale. Za kryterium można jednak przyjąć wymiar, który dla fraktali nie jest liczbą naturalną, co może wydawać się nieco dziwne. Przypomnijmy, w geometrii euklidesowej prostej przypisujemy wymiar 1, płaszczyźnie - 2, przestrzeni - 3, czyli liczby naturalne.

Generalnie fraktale - to interpretacja graficzna pewnych równań czy ciągów, które do niedawna uchodziły za matematyczne „potworki”, zupełnie abstrakcyjne i nie mające żadnych odniesień do rzeczywistości. Ich tworzenie polega na powtarzaniu w nieskończoność określonych czynności, na liczeniu kolejnych elementów pewnych ciągów i dobieraniu koloru



rysowanego punktu w zależności od wyniku.

Jaka jest faktyczna struktura przyrody? Na obrazkach dzieci jawi się ona często jako kombinacje prostych figur geometrycznych (dom - kwadrat, słońce - koło, pies - prostokąt, chmura - elipsa itd.). Patrzymy na to z odrobiną wyższości, ale - tak na prawdę - czy nasze pojmowanie świata tak bardzo różni się od jego pojmowania przez dziecko? Proszę spróbować narysować wodę albo chmurę z całą jej skomplikowaną strukturą. Nie jest to takie łatwe, prawda? Czy można powiedzieć, że chmura jest elipsoidą albo prostopadłościannem? A drzewo? Czy można jednoznacznie powiedzieć, że pień to stożek, liście to trójkąty, a gałęzie to odcinki? Jak nazwać kształt płomienia albo błyskawicy?

To właśnie są przykłady występujących w przyrodzie obiektów fraktalnych. Chmura stanowi niewątpliwie jedną całość, ale jest “dziurawa” jak gąbka, ponieważ składa się z nieprzebranej ilości mikroskopijnych kropelek wody i pary wodnej. Jest więc

odrębną całością, ale złożoną z wielu mniejszych całości, także odrębnych. Jeżeli “wytniemy” mały kawałek chmury, to otrzymamy coś bardzo do niej podobnego. Gdy odłupiemy kawałek skały, to otrzymamy miniaturkę całej skały. I jeśli sfotografujemy odłupany fragment bez żadnego układu odniesienia (np. pudełka zapalek, którego wiel-

kość znamy), to nie będziemy w stanie odróżnić go od prawdziwej góry (ten efekt



bardzo często wykorzystuje się w trikach filmowych)! Podobnie fraktale: nie można jednoznacznie nazwać ich kształtów, a przy tym charakteryzują się one dużym samopodobieństwem - fragment przypomina całość, również przy fraktalach różnych rodzajów.

Przyglądając się fraktalom, ciężko się oprzeć wrażeniu, że formy te są nam znajome. Widać ich podobieństwo do ognia, wody, szronu. Efekt plazmy doskonale oddaje chaotyczną strukturę chmur, a specyficzne spirale-ramiona przypominają konika morskiego, rozgwiezdy, glony, czy morskie wodorosty.

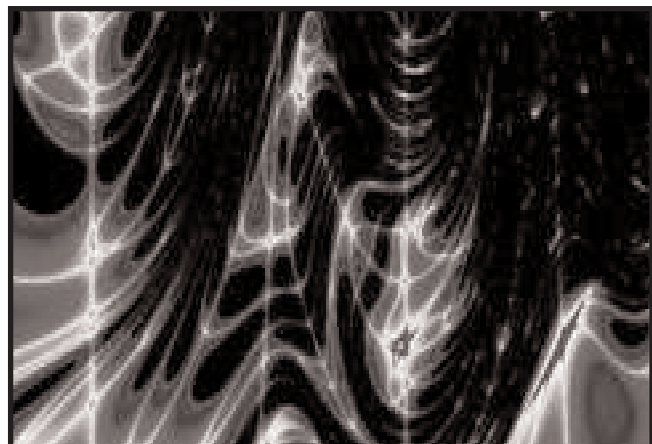
Jednego z przedstawionych fraktali można wprost pomylić z wizerunkiem błyskawicy (to nie jest zdjęcie nieba podczas



burzy!).

Podobieństwo to bierze się stąd, że fraktale mają charakterystyczny, chaotyczny "kształt", który znacznie lepiej oddaje strukturę przyrody niż tradycyjne pojęcia geometrii. Jednak najdziwniejsze, i jak na razie najbardziej tajemnicze, jest źródło

tych podobieństw. Cóż, jest to zagadnienie z dziedziny metafizyki... Może kiedyś będziemy umieli je rozwiązać. Do niedawna w nauce panował deterministyczny pogląd, że wszystko można przewidzieć i obliczyć. Pogląd ten ostatnio zaczął się poważnie chwiać, a jednocześnie nadzieje pokładane w komputerach i ich mocy obliczeniowej okazały się przesadne. Weźmy na przykład powierzchnię wody w jeziorze. Dopóki jest ona płaska (nie ma wiatru) można przyjąć, że jest zwykłą, łatwą do opisania matematycznie płaszczyzną. Gdy wrzucimy do jeziora jeden lub dwa drobne kamyczki, to powstałe fale koliste też możemy „od biedy” opisać odpowiednim równaniem mechaniki falowej. Ale gdy wrzucimy całą garść takich kamyczków, albo



jeden wielki kamień nieforemny, to nie ma żadnych szans na policzenie współrzędnych cząstek, tworzących powierzchnię tafli jako funkcji czasu. Można powiedzieć, że absolutnie nie da się przewidzieć dokładnego zachowania wody po wrzuceniu w nią kamienia - nie mówiąc już o obli-



zeniach w czasie rzeczywistym! Każdy widział, jaki powstaje w tym czasie chaos - jest to bardzo piękne, ale nigdy nie da się znaleźć funkcji analitycznej, która opisze takie zjawisko ze stuprocentową dokładnością. Każdy natomiast potrafi narysować drzewo, ponieważ ono zazwyczaj kojarzy się z walcem, stożkiem, odcinkami itp. Ale proszę spróbować dokładnie narysować powierzchnię pnia drzewa czy morza podczas ulewy lub burzy... Trudności są spowodowane tym, że obiekty tego typu ciężko opisać w terminach zwykłej geometrii. Gdy jednak zamiast języka tradycyjnej geometrii użyjemy języka fraktali - problem znacznie się uprości. I tak - powstaje filozoficzne pytanie o piękno. Czy piękne jest to, co proste, czy to, co chaotyczne i nieuporządkowane? Osobiście jestem przekonany, że piękno to synonim pewnej odmiany chaosu, swoistego porządku w nieporządku. Płomień ognia jest tak prosty, a jednak tak skomplikowany...

Zresztą nikt chyba nie wątpi w piękno przyrody, a ona z dużą dozą prawdopodobieństwa wybrała wszelkie oglądane przez nas rozwiązania w idealnie odpowiednich proporcjach. Miała w końcu na to sporo czasu... Jestem przekonany - choć dopuszczam i sąd nie tak skrajny - że żaden obraz, nawet największego mistrza pędzla, nigdy nie będzie doskonalszy od arcydzieła największego artysty, jakim jest Natura. A fraktale? Może jednak wykradliśmy Naturze skrawek zazdrośnie strzeżonego przepisu na piękno?

Ktoś może jednak zapytać - fraktale są bar-

dzo ładne, ale co z tego? Czy mamy z nich jakikolwiek pożytek, czy też jest to jedynie nikomu niepotrzebna ciekawostka matematyczna? Otóż okazuje się, że algorytmy, służące do generowania różnego rodzaju fraktali, mają zastosowania praktyczne, i to dość ważne. Po pierwsze - przekształceń fraktalnych można używać do kodowania obrazów, a co za tym idzie - do ich kompresji, czyli zmniejszania rozmiarów opisujących je plików komputerowych. Po drugie - algorytmy fraktalne wykorzystuje się do nadawania realistycznych tekstur tworzonym na komputerze obiektom - ma to z kolei szerokie zastosowanie w technikach przetwarzania obrazu wideo. Wreszcie, za pomocą fraktali można sztucznie generować na komputerze wirtualne światy, do złudzenia przypominające rzeczywiste krajobrazy górskie, morze, słońce itp. Niektóre z nich dają zdumiewające efekty. Jednak pierwszym zastosowaniem fraktali nie była kompresja obrazów, a pomiar linii brzegowej.

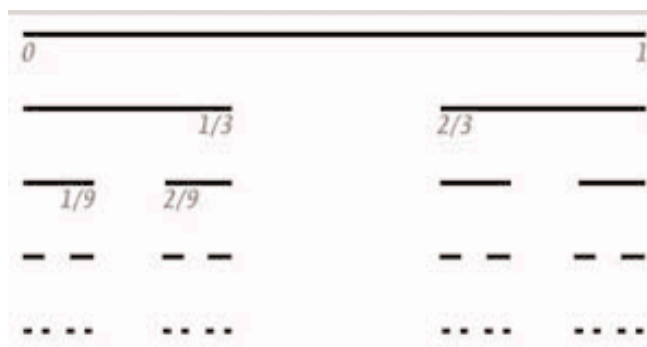
Katarzyna Kluczyk klasa I f
Damian Folfoszyński klasa I c



Jak powstały pierwsze fraktale geometryczne?

Zbiór Cantora

Dzielimy odcinek na 3 części. Z tych części usuwamy środkową. Tak samo

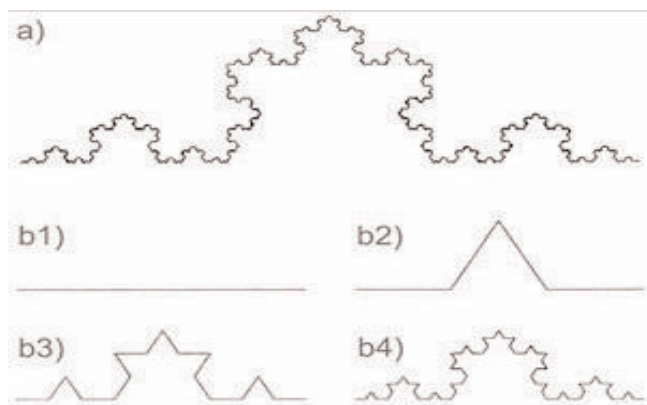


postępujemy z pozostałymi odcinkami i tak w nieskończoność. Poniżej pokazane jest kilka pierwszych kroków:

Wymiar tego fraktala to: $\log 2 / \log 3$, czyli liczba z przedziału (0 ; 1).

Krzywa Kocha

Zaczynamy od linii prostej. Dzielimy ją na 3 części i usuwamy środkową. W jej

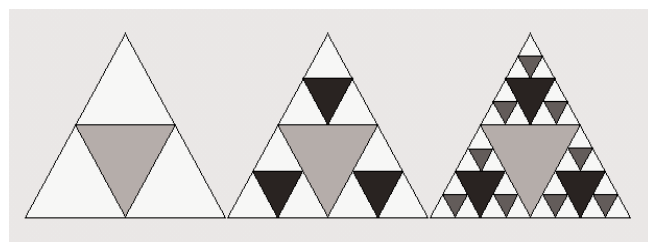


miejsce wstawiamy trójkąt równoboczny o boku takim jak usunięta część. Tak samo postępujemy z każdym z powstałych odcinków.

Wymiar tego fraktala to: $\log 4 / \log 3$, czyli liczba z przedziału (1 ; 2).

Trójkąt i Dywan Sierpińskiego

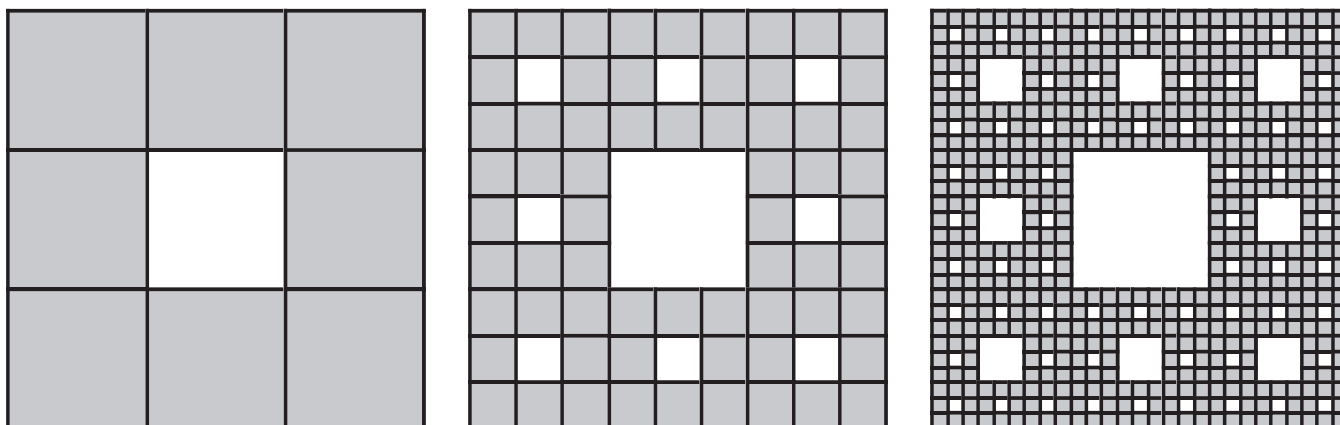
Twórcą trójkąta i dywanu Sierpińskiego jest polski matematyk Waław Sierpiński (1882-1969), jeden z najwybitniejszych matematyków polskich tamtych czasów. Sposób postępowania jest następujący: Najpierw rysujemy zwykły trójkąt równoboczny (wypełniony), następnie wybieramy środki jego trzech boków. Punkty wraz z wierzchołkami początkowego trójkąta wyznaczają cztery mniejsze trójkąty, z których usuwamy środkowy. Ten sam proces powtarzamy dla trzech pozostałych trójkątów itd.



Wymiar tego fraktala to: $\log 4 / \log 3$, czyli liczba z przedziału (1 ; 2).

Sposób powstawania dywanu jest bardzo podobny. Rysujemy kwadrat, a następnie dzielimy go na dziewięć równych części, z których usuwamy środkową.





Wymiar tego fraktala to: $\log 8 / \log 3$
czyli liczba z przedziału (1 ; 2)

Katarzyna Kluczyk klasa I f



Wyjazd delegacji szkoły na podsumowanie projektu

Sokrates – Comenius do Lüdinghausen

Dnia 24.11.2005 r. wyjechaliśmy spod szkoły do Lüdinghausen na projekt Sokrates Comenius. Temat przewodni warsztatów: Od pięciokąta foremego do fraktala dwunastościennego. W warsztatach brały udział szkoły z Niemiec, Francji, Luksemburga oraz Polski.

Gdy dotarliśmy na miejsce, spotkaliśmy się z uczniami tamtejszej szkoły i udaliśmy się z nimi do ich domów.

Pierwszego dnia pojechaliśmy do miasta Münster znajdującego się niedaleko Lüdinghausen. O godzinie 17.00 było powitanie grup z różnych krajów oraz omówienie projektu. W tym samym dniu mieliśmy także przyjemność wysłuchać wykładu Dr Christopha Pöppe o figurach i bryłach foremnych oraz ich związku z fraktalami. Wykład był bardzo interesujący, słuchaliśmy go z wielkim zainteresowaniem.

Drugiego dnia zostaliśmy podzieleni na dziesięcioosobowe grupy, w których znajdowali się uczniowie pochodzący z Polski, Niemiec, Luksemburga oraz Francji. Nasza praca polegała na sklejaniu dwunastościennych brył, co w efekcie końcowym dało nam drugi etap fraktala dwunastościennego.

W niedzielę 27.11.2005 r. odbyło się spotkanie, na którym została podsumowana nasza praca. Zrobiliśmy pamiątkowe zdję-



cia ze swoim dziełem, po czym udaliśmy się do autobusu.

Podsumowując, wyjazd ten uważam za udany, gdyż dowiedziałem się wiele o fraktalach, poznałem wielu ciekawych ludzi, z którymi do dzisiaj utrzymuję kontakt oraz podszkoliłem język niemiecki. W przyszłości chciałbym ponownie wziąć udział w takim projekcie.

Maciek Bemberek
Kl. I „a” LO



10

[illegible]

$$\begin{aligned}
 x &= 1 + \frac{1}{x} & \text{Wynikiem tego fraktala} \\
 x^2 &= x + 1 & \text{jest sławna złota liczba} \\
 x^2 - x &= 1 & \\
 x^2 - x + \frac{1}{4} &= 1 + \frac{1}{4} & \\
 (x - \frac{1}{2})^2 &= \frac{5}{4} & \text{Tak więc złota liczba ist-} \\
 x &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} & \text{nieje także we fraktalach} \\
 & & \text{liczbowych. Można ją} \\
 & & \text{także przedstawić w} \\
 & & \text{postaci fraktala pierwiastkowego:}
 \end{aligned}$$

Istnieją także fraktale nawiasowe i potęgowe np.

Sposoby rozwiązywania tych fraktali nie odbiegają bardzo od metod rozwiązań fraktali pierwiastkowych i ułamkowych, dlatego też nie będziemy ich tutaj przedstawiać.

Oblicz wartość wyrażenia:

$$\begin{array}{r}
 2 + \frac{1}{} \\
 3 + \frac{1}{} \\
 2 + \frac{1}{} \\
 3 + \frac{1}{} \\
 2 + \frac{1}{} \\
 3 + \dots
 \end{array}$$

$$\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9} \dots \right) \right) \right)$$

9^{9^{9⁹...}}

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & & \\ \hline & & 3 & & & 3 & \\ \hline 3 & & 3 & + & 3 & & 3 \\ \hline \frac{3}{3} + \frac{3}{3} & + & \frac{3}{3} + \frac{3}{3} & & \frac{3}{3} + \frac{3}{3} & + & \frac{3}{3} + \frac{3}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$



Złota liczba i złoty podział oraz jego występowanie

Złota liczba wyraża długość odcinka spełniającego warunek tzw. złotego podziału. Pierw-szy wyrysował złoty podział Hip-pasus w V wieku p.n.e. Starożytni Grecy uważali złoty po-dział za idealną propor-cję, którą chętnie realizowali w architek-turze. Obecnie złoty podział jest też często stosowany, np. wymiary zeszytu pozostają w stosunku w przybliżeniu równym sto-sunkowi złotego podziału.

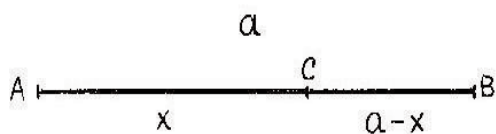
Złota liczba ma ciekawe własności:

- aby ją podnieść do kwadratu, wystarczy dodać do niej jedynkę,
- aby znaleźć jej odwrotność, wystar-czy odjąć jedynkę.

Proponuję czytelnikowi, aby samodzielnie sprawdził te własności, po przeczytaniu dalszej części artykułu.

Każdy, kto uczył się matematyki w szkole podstawowej, musiał uczyć się o propor-cjach, na których opiera się złoty podział.

ZŁOTY PODZIAŁ – to taki podział odcinka a na dwie części x i $(a - x)$ tak, aby stosunek długości odcinka a do jego większej części x był równy stosunkowi długości części x do czę-ści mniejszej $(a - x)$.



Odcinek x znajdziemy, rozwiązując rów-nanie (I).

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \quad (I)$$

$$a \cdot (a - x) = x^2$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\Delta = a^2 - 4 \cdot (-a^2) = 5a^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{5})$$

- ta wielkość nie spełnia warunków zada-nia jako długość odcinka

$$x_2 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

- ta spełnia warunki zadania

Wobec tego szukaną liczbą x jest liczba

Mając x , znajdziemy $x_2 = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$
($a - x$), a także stosunek

który jest taki sam, jak $\frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
stosunek

Ten stosunek oznaczamy przez ϕ i nazy-wamy złotą liczbą, która wyraża stosunek dwóch części odcinka podzielonego zło-tym podziałem.

Oto i cała tajemnica złotego podziału.

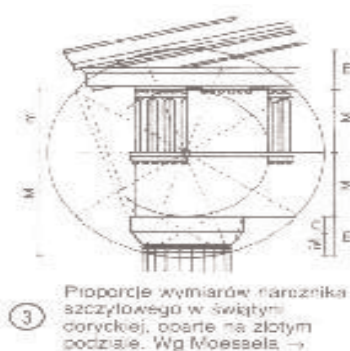
Praktycznie spotykamy się z tą proporcją codziennie, nie zdając sobie nawet z tego sprawy. Patrząc na ekran telewizora, na



fotografię czy też na tę kartkę papieru. Otóż stosunek boków tych prostokątów jest zbliżony do proporcji złotego podziału. Na przykład formaty papieru A4, A3, A2 itd. mają stosunki boków wyrażające się liczbą 0,7. Klatka filmu małoobrazkowego 24x36 ma stosunek boków równy 0,666. Złoty podział stanowi o swoistym "pięknieniu" różnych przedmiotów oraz elementów sztuki czy architektury. Oto i cała tajemnica złotego podziału.

PRZYKŁADY:

- zasada złotego podziału znana od starożytności, znalazła zastosowanie w architekturze antycznej, romańskiej oraz w sztuce renesansu i klasycyzmu;
- okna w budowlach w stylu renesansowym (szerokość do wysokości była w stosunku 5:8);
- renesansowe pałace włoskie, np. Palazzo Strozzi, Palazzo Rucelai, Santa Maria Novella, Kaplica Palazzo Vendrai;
- także inne świątynie, np. Parthenon na Akropolu,



- pentagram - gwiazda pięcioramienna;



Pitagorejczycy wybrali gwiazdę pięcioramienną na godło swojego tajnego bractwa, ponieważ w tej figurze każdy odcinek jest podzielony w złotym stosunku względem sąsiedniego mniejszego od niego.

- w znormalizowanych zeszytach formatu : A-0, A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6... boki tych zeszytów są w złotym podziale;
- złoty podział wykorzystuje się do konstruowania przepięknych mozaik wykonanych z figur powstałych w wyniku wykorzystania złotego podziału;



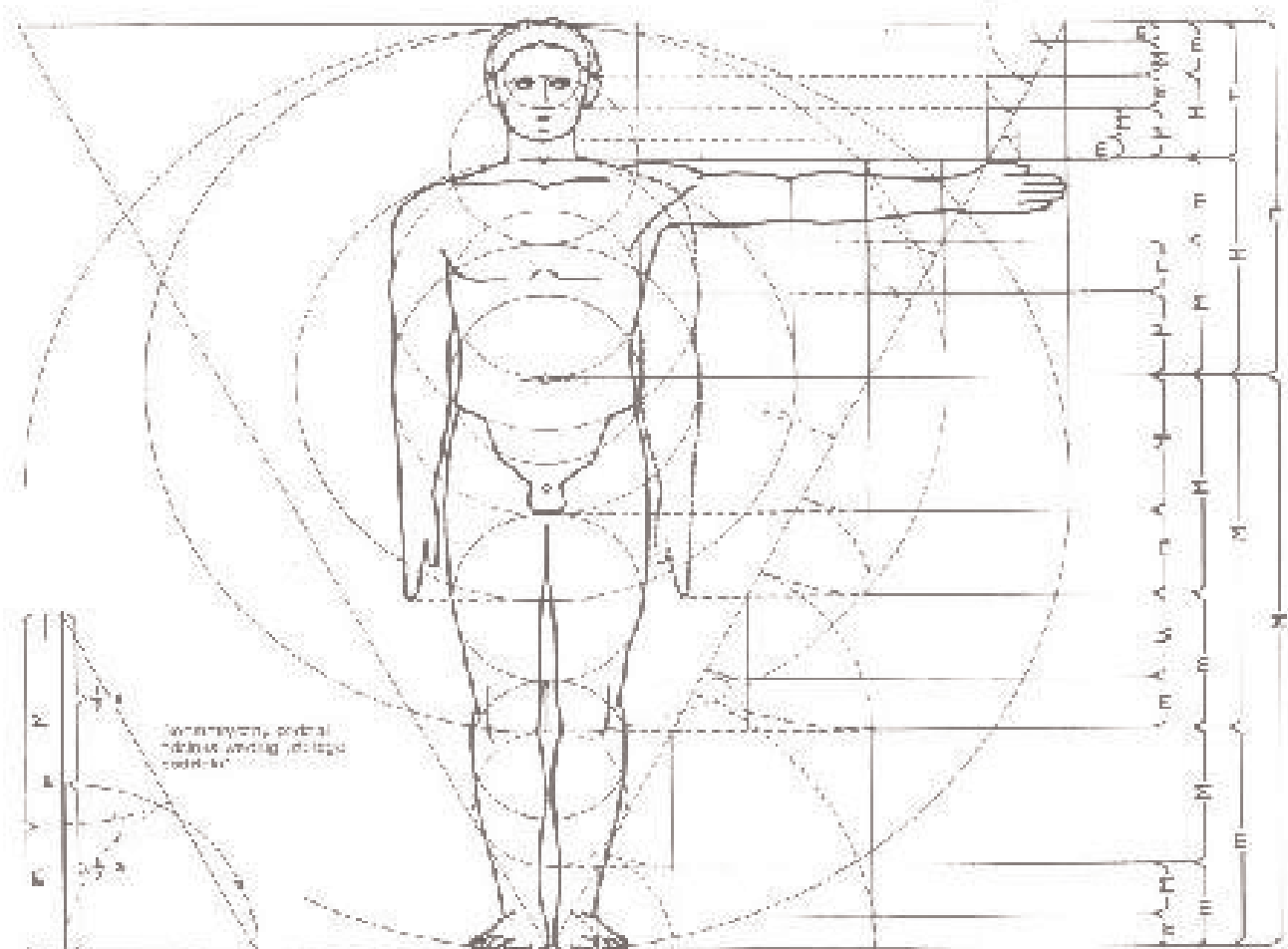
Dziesięciokąt foremny (wypukły)



Dziesięciokąt wklęsły



CZŁOWIEK CZŁOWIEK. MIARĄ WSZYSTKICH RZECZY



- złoty podział wykorzystuje się także do określania proporcjonalnej budowy człowieka:

1. Obwód głowy każdego człowieka pozostaje w określonym stosunku do wysokości tego człowieka. Wzrost jest trzy razy większy od obwodu głowy.

2. Każdy człowiek mierzy około sześciu stóp. Mierząc, ile stóp tej osoby mieści się w jej wzroście, otrzymujemy taki rezultat. Wynika z tego, że długość stopy jest mniej więcej równa jednej szóstej

wzrostu człowieka.

3. Następny stosunek jest nazywany "pępkiem Pitagorasa" i jest to stosunek odległości pępka człowieka od ziemi - do jego wzrostu. Zazwyczaj wynosi $1 : 1,6$ (czyli jest to złoty podział).

Proporcje ustalone przez Dürera przyjęły się powszechnie. Jako podstawę miar przyjął on wysokość człowieka i ustalił następujący podział postaci :

$1/2 h$ - górna część ciała od kroku w górę;

$1/4 h$ - długość nogi od kostki do kolana i



odległość od podbródka do pępka;
1/6 h - długość stopy;
1/8 h - długość od czubka głowy do dolnej
krawędzi podbródka;
1/10 h - wysokość twarzy i szerokość
twarzy(łącznie z uszami); długość dłoni
do nadgarstka;
1/12 h - szerokość twarzy na wysokości
dolnej krawędzi nosa, szerokość nogi (nad
kostką) itd. Dalsze podziały dochodzą do
1/40 h.

Ania klasa II g

Podziękowania

Na zakończenie pragnę przede wszystkim
podziękować Sebastianowi Adam-
czykowi, Maćkowi Bembenekowi,

Ani Drożdżyńskiej, Damianowi Folfo
szyńskiemu, Krzyskowi Jędrusikowi, Kasi
Kluczyk, Pawłowi Łabudzie, Michałowi
Ogórek, Paulinie Pawlickiej, Bartkowi
Paździurowi, Paulinie Szczupak i Pawłowi
Wilkowi, którzy tak ochoczo
odpowiedzieliście na mój apel. Dziękuję,
że wytrwaliście do końca i poświęciliście
swój wolny czas na tworzenie, odkry-
wanie i zgłębianie pięknego, a zarazem
tajemniczego świata chaosu. Poznaliście
już jego małą część. Przed Wami
jeszcze długa droga do poznania świata,
ale wiercie mi, jesteście na dobrej
drodze. Bez Was nie byłoby tego projektu
i być może następnych. ?

DANUTA BORKO



Bildung und Kultur

Sokrates
Comenius



Opracowanie gazetki : Pani mgr. Danuta Borko
Łukasz Żuchewicz IIf

